

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

Тўла группа ташкил этувчи $A_1, A_2, \dots, A_n$ ходисалар эхтимолликларининг йиғиндисиди 1 га тенг, яъни

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1.$$

Қарама-қарши ходисалар эхтимолликларининг йиғиндисиди 1 га тенг, яъни

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

14.2.2. Иккита A ва B ходисанинг *кўпайтмаси* деб, бу ходисаларнинг биргаликда рўй беришидан иборат $C = A \cdot B$ ходисага айтилади.

Иккита эркил ходисанинг биргаликда рўй бериши эхтимоллиги бу ходисалар эхтимолликларининг кўпайтмасига тенг:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Биргаликда эркил бўлган бир нечта ходисанинг рўй бериши эхтимоллиги бу ходисалар эхтимолликларининг кўпайтмасига тенг:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n).$$

B ходисанинг A ходиса рўй берди деган шартда ҳисобланган эхтимоллиги *шартли эхтимоллик* дейилади. Шартли эхтимоллик қуйидагича белгиланади:

$$P_A(B) \text{ ёки } P(B/A).$$

Иккита боғлиқ ходисанинг биргаликда рўй бериши эхтимоллиги учун қуйидаги формулалар ўринли:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) \text{ ёки } P(AB) = P_B \cdot P_B(A).$$

Бир нечта боғлиқ ходисаларнинг биргаликда рўй бериш эхтимоллиги қуйидаги формула бўйича ҳисобланади:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) \cdot \dots \cdot P_{A_1 A_2 \dots A_{n-1}}(A_n).$$

14.2.3. A ва B тасодифий ходисалар йиғиндисининг эхтимоллиги учун қуйидаги формула ўринли:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

14.2.4. Тўла эхтимоллик формуласи. $B_1, B_2, \dots, B_n$ лар ходисаларнинг тўла гуруҳини ташкил этиб, A ходиса уларнинг бири билан рўй бериши мумкин бўлсин. У ҳолда

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(B_k) \cdot P_{B_k}(A).$$

14.2.5. Бейес формуласи. Агар A ходиса рўй бергани маълум бўлса, у ҳолда $P(B_k)$, $k = \overline{1, n}$ эҳтимолликларни қайта баҳолаш мумкин, яъни $P_A(B_k)$ шартли эҳтимолликларни ушбу Бейес формуласи ёрдамида топиш мумкин:

$$P_A(B_k) = \frac{P(B_k) \cdot P_{B_k}(A)}{P(A)}.$$

1- мисол. Цехда бир нечта станок ишлайди. Смена давомида битта станокни созлашни талаб этиш эҳтимоллиги 0,2 га тенг, иккита станокни созлашни талаб этиш эҳтимоллиги 0,13 га тенг. Смена давомида иккитадан ортик станокни созлашни талаб этиш эҳтимоллиги эса 0,07 га тенг. Смена давомида станокларни созлашни талаб этилиши эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. Қуйидаги ходисаларни қараймиз: A — смена давомида битта станок созлашни талаб этади ходисаси;

B — смена давомида иккита станок созлашни талаб этади ходисаси;

C — смена давомида 2 тадан ортик станок созлашни талаб этади ходисаси.

A , B , C ходисалар ўзаро биргаликда эмас. Бизни қуйидаги ходиса кизиқтиради: $(A + B + C)$ — смена давомида созлаш зарур бўладиган станоклар:

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) = 0,2 + 0,13 + 0,07 = 0,4.$$

2- мисол. Иккита овчи бир пайтда бир-бирига боғлиқ бўлмаган ҳолда қуёнга қарата ўқ узишди. Овчилардан ҳеч бўлмаганда бири ўқни нишонга текказса, қуён отиб олинган бўлади. Биринчи овчининг нишонга уриш эҳтимоллиги 0,8 га, иккинчисиники 0,75 га тенг бўлса, қуёни отиб олиш эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. Қуйидаги ходисаларни қараймиз:

A — биринчи овчи нишонга текказиши;

B — иккинчи овчи нишонга текказиши.

A ва B эркли ходисалар. Бизни $(A + B)$ ходиса кизиқтиради.

$(A + B)$ — ҳеч бўлмаганда битта овчининг нишонга текказиши.
У ҳолда

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = 0,8 + 0,75 - 0,8 \cdot 0,75 = 0,95,$$

$$P(A + B) = 0,95.$$

3- мисол. Командада 12 спортчи бўлиб, уларнинг 5 таси спорт устаси. Спортчилар ичидан қуръа ташлаш орқали уч спортчи танланади. Танланган спортчиларнинг ҳаммаси спорт устаси бўлиши эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. A_1 — биринчи спортчи — спорт устаси;

A_2 — иккинчи спортчи — спорт устаси;

A_3 — учинчи спортчи — спорт устаси;

$A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$ — учала спортчи — спорт устаси.
 A_1, A_2, A_3 , ходисалар — боғлиқ ходисалар. Демак,

$$P(A) = P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) P_{A_1 A_2}(A_3) = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{22}.$$

4- м и с ол. Талаба ўзига керакли формулани 3 та маълумотномадан кидиради. Формула биринчи, иккинчи, учинчи маълумотномада бўлиши эҳтимоллиги мос равишда 0,6; 0,7; 0,8 га тенг. Формула:

- а) факат битта маълумотномада бўлиши;
- б) факат иккита маълумотномада бўлиши;
- в) учала маълумотномада бўлиши;
- г) ҳеч бўлмаганда битта маълумотномада бўлиши эҳтимоллигини топинг.

Е чи ш. Қуйидаги ходисаларни қараймиз:

A_1 — формула биринчи маълумотномада бор,

A_2 — формула иккинчи маълумотномада бор,

A_3 — формула учинчи маълумотномада бор.

а) $A = A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$ — формула факат битта маълумотномада бор.

$A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3, \bar{A}_1 A_2, \bar{A}_3, \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$ ходисалар биргаликда эмас ва $A_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3; \bar{A}_1, A_2, A_3; \bar{A}_1, \bar{A}_2, A_3$ ходисалар боғлиқ эмас. Демак,

$$P(A) = P(A_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)P(A_2)P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3) = 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,8 = 0,188.$$

б) $A = A_1 A_2 \bar{A}_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_1 A_2 A_3$ — формула факат иккита маълумотномада бор. Демак,

$$P(A) = 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,2 + 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,8 + 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,8 = 0,452.$$

в) $A = A_1 A_2 A_3$ — формула учала маълумотномада бор.

$$P(A) = 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,8 = 0,336.$$

г) $A = A_1 + A_2 + A_3$ — формула ҳеч бўлмаганда битта маълумотномада бор. Мазкур ҳолда A ходисага карама-қарши ходисани қараш кулай.

$\bar{A}$ — формула ҳеч бир маълумотномада йўқ.

$\bar{A} = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$, у ҳолда $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) = 1 - 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,2 = 1 - 0,024 = 0,976.$$

Шундай қилиб, а) $P(A) = 0,188$; б) $P(A) = 0,452$; в) $P(A) = 0,336$; г) $P(A) = 0,976$.

5- м и с ол. Биринчи қутида 2 та ок, 6 та қора, иккинчи қутида эса 4 та ок, 2 та қора шар бор. Биринчи қутидан таваккалига 2 та шар олиб, иккинчи қутига солинди, шундан кейин иккинчи қутидан таваккалига битта шар олинди.

а) Олинган шар ок бўлиши эҳтимоллилиги қандай?

б) Иккинчи қутидан олинган шар ок бўлиб чикди. Биринчи қутидан олиб иккинчи қутига солинган 2 та шар ок бўлиши эҳтимоллиги қандай?

Е чи ш. а) Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

A — иккинчи қутидан олинган шар ок,
 B_1 — биринчи қутидан иккинчи қутига 2 та ок шар солинган,
 B_2 — биринчи қутидан иккинчи қутига 2 та турли рангдаги шар солинган,

B_3 — биринчи қутидан иккинчи қутига 2 та қора шар солинган.

B_1, B_2, B_3 — ҳодисалар тўла гуруҳ ташкил этади. У ҳолда тўла эҳтимоллик формуласига кўра

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + P(B_3)P_{B_3}(A).$$

$B_k, k=\overline{1,3}$ гипотезаларнинг эҳтимолликларини ва $P_{B_k}(A)$ шартли эҳтимолликларни классик схема бўйича ҳисоблаймиз:

$$P(B_1) = \frac{C_2^2}{C_8^2} = \frac{1}{28}; \quad P(B_2) = \frac{C_2^1 \cdot C_6^1}{C_8^2} = \frac{12}{28}.$$

$$P(B_3) = \frac{C_6^2}{C_8^2} = \frac{15}{28}; \quad P_{B_1}(A) = \frac{3}{4}; \quad P_{B_2}(A) = \frac{5}{8};$$

$$P_{B_3}(A) = \frac{1}{2}.$$

Топилган натижаларни тўла эҳтимоллик формуласига қўямиз:

$$P(A) = \frac{1}{28} \cdot \frac{3}{4} + \frac{12}{28} \cdot \frac{5}{8} + \frac{15}{28} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{16}.$$

б) $P_A(B_1)$ эҳтимолликни Бейес формуласи бўйича топамиз:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{28} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{9}{16}} = \frac{1}{21}.$$

2- дарсхона топшириғи

1. Курсант отиш бўйича «синов» топшириши учун 4 дан паст бўлмаган баҳо олиши керак. Агар курсант отганига «5» баҳони 0,3, «4» баҳони 0,6 эҳтимоллик билан олиши маълум бўлса, курсантнинг «синов» топшира олиш эҳтимоллигини топинг. Ж: $p=0,9$.

2. Иккита мерган нишонга қарата биттадан ўқ узишда. Биринчи мерганнинг нишонга текказиш эҳтимоллиги 0,6 га, иккинчиси учун 0,7 га тенглиги маълум бўлса, қуйидаги ҳодисаларнинг эҳтимолликларини топинг:

- мерганларнинг фақат бирининг нишонга текказиши;
- мерганларнинг ҳеч бўлмаганда бири нишонга текказиши;
- иккала мерган нишонга текказиши;
- ҳеч бир мерганнинг нишонга текказа олмаслиги;
- мерганларнинг ҳеч бўлмаганда бири нишонга текказа олмагани.

Ж: а) 0,46; б) 0,6; в) 0,42; г) 0,12; д) 0,58.

3. Йиғувчига зарур деталь биринчи, иккинчи, учинчи, тўртинчи яшиқда эканлиги эҳтимоллиги мос равишда 0,6; 0,7; 0,8; 0,9 га тенг. Зарур деталь:

а) кўпи билан 3 та яшиқда бўлиши;

б) ками билан 2 та яшиқда бўлиши эҳтимоллигини топинг.

Ж: а) 0,6976; б) 0,9572.

4. Гуруҳда 10 талаба бўлиб, уларнинг 7 нафари аълочилар. Тўрт талаба деканатга қакиртирилди. Уларнинг барчаси аълочи бўлиши эҳтимоллигини топинг. Ж: $\frac{1}{6}$.

5. Учта завод соат ишлаб чиқаради ва магазинга жўнатади. Биринчи завод бутун маҳсулотнинг 40% ини, иккинчи завод 45% ини, учинчи завод эса 15% ини тайёрлайди. Биринчи завод чиқарган соатларнинг 80% и, иккинчи завод соатларининг 70% и, учинчи завод соатларининг 90% и илгарилаб кетади. Сотиб олинган соатнинг илгарилаб кетиши эҳтимоллигини топинг. Ж: 0,77.

6. Самолётга қарата учта ўқ узилган. Биринчи отишда нишонга тегиш эҳтимоллиги 0,5 га, иккинчисида 0,6 га, учинчисида 0,8 га тенг. Битта ўқ текканда самолётнинг уриб туширилиши эҳтимоллиги 0,3 га, иккита ўқ текканда 0,6 га тенг. Учта ўқ тегса, самолёт уриб туширилади. Самолётнинг уриб туширилиш эҳтимоллигини топинг. Ж: 0,594.

7. Спартакиадада биринчи гуруҳдан 4 талаба, иккинчи гуруҳдан 6, учинчи гуруҳдан 5 талаба катнашади. Институт терма жамоасига биринчи гуруҳдаги талаба 0,9 эҳтимоллик билан, иккинчи гуруҳ талабаси 0,7 ва учинчи гуруҳ талабаси 0,8 эҳтимоллик билан қабул қилиниши мумкин. Таваккалига танланган талаба терма жамоага қабул қилинди. Бу талабанинг қайси гуруҳда ўқиши эҳтимоллиги каттарок? Ж: Талабанинг иккинчи гуруҳда ўқиши эҳтимоллиги каттарок.

8. Цехда тайёрланадиган деталлар иккита назоратчи томонидан текширилади. Деталнинг назорат учун биринчи назоратчига тушиши эҳтимоллиги 0,6 га, иккинчи назоратчига тушиши 0,4 га тенг. Ярокли деталнинг биринчи назоратчи томонидан яроксиз деб топилиши эҳтимоллиги 0,06 га, иккинчи назоратчи учун эса 0,02 га тенг. Яроксиз деб топилган деталлар текширилганда улар ичидан яроклилиги чиқиб қолди. Бу детални биринчи назоратчи текширганлиги эҳтимоллигини топинг. Ж: $\frac{9}{11}$.

2- мустақил иш

1. Битта ўқ узишда нишонга тегиш эҳтимоллиги биринчи мерган учун P га, иккинчи мерган учун 0,7 га тенг. Мерганлар бир вақтда ўқ узишганда роса битта ўқнинг нишонга тегиш эҳтимоллиги 0,38 га тенглиги маълум бўлса, P ни топинг. Ж: 0,8.